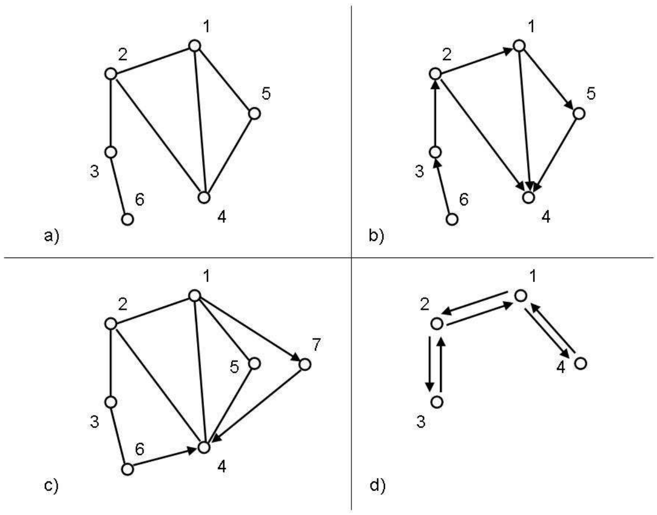
Cours de Graphes
Première fiche de TD — Les bases

Départements Info & Internet — ESIL — usage interne

2007-08

1 Matrices d'adjacence



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner les matrices d'adjacence pour les graphes ci-dessus.
2. Sont-ils symétriques, anti-symétriques, réflexifs, anti-réflexifs, transitifs ? Déterminer les degrés, éventuellement entrants et sortants, des différents graphes, ainsi que leur diamètres et l'ensemble des sommets "au centre".
3. Dessiner les graphes correspondant aux matrices d'adjacence ci-dessus. Sont-ils symétriques ou non ? Quels sont leurs degrés et diamètres ?

2 Propriété du degré

Soit le graphe non orienté $G = (V, E)$ qui comporte l'ensemble des sommets $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Montrer que la somme des degrés de G est un nombre pair. En déduire que tout graphe non orienté a un nombre pair de sommets de degré impair.

3 Puits d'un graphe orienté

Un sommet v_p d'un graphe orienté est un puits si les arcs $v_i \longrightarrow v_p$ existent pour tous les v_i différents de v_p, sans qu'aucun arc de retour n'existe.

Montrer qu'un graphe orienté possède au plus un puits. Donner une procédure qui détermine si un graphe G possède un puits ou non ?

4 Parcours d'un graphe

Le parcours en largeur consiste à explorer le graphe niveau par niveau à partir d'un sommet donné. Ce parcours est intrinsèquement itératif. Le parcours en profondeur consiste à partir d'un sommet donné, à suivre un chemin le plus loin possible sans boucler et, puis, à faire des retours en arrière pour prendre les arêtes précédemment ignorées. Ce parcours est quant à lui intrinsèquement récursif.

1. Dans quel ordre seront visités les sommets du second graphe de la première question si nous partons du sommet 4 et que nous parcourons le graphe en profondeur ? Même question pour un parcours en largeur.
2. Ecrire l'algorithme de parcours en largeur d'un graphe.
3. Ecrire l'algorithme de parcours en profondeur d'un graphe. On pourrait s'imaginer que les arêtes qui ferment une boucle sont transformées en arêtes "en pointillé". Cette notion nous intéressera par la suite.

5 Clique d'un graphe

On appelle clique d'un graphe non orienté tout sous-ensemble de sommets qui sont tous voisins deux à deux. Montrer que, dans toute clique, il existe un chemin de parcours en profondeur qui visite tous les sommets avant de fermer la boucle.

6 Sommets d'articulation

On dit qu'un sommet d'un graphe non orienté et connexe est un *point d'articulation* si sa suppression déconnecte le graphe. Un graphe est dit *bi-connecté* s'il ne contient pas de point d'articulation. Dans le graphe a) de la page précédente, le sommet 2 est un point d'articulation alors que le sommet n'en est pas un. On peut considérer le parcours en profondeur du graphe et utiliser la notion d'arête en pointillé. Montrer alors qu'un sommet s n'est pas un point d'articulation si et seulement si on peut trouver un chemin dans le parcours en profondeur qui descend et passe par une arête en pointillé pour se retrouver en s ou un de ses ancêtres.

7 Graphes orientés sans cycles

On dit qu'un graphe orienté est sans cycles si aucun chemin ne peut retourner vers son point de départ. On anglais on parle de DAG, directed acyclic graph. Le graphe b) de la première question est un DAG. Sur un DAG, on peut définir un *tri topologique* en cherchant à attribuer à tout sommet une valeur (par exemple un entier naturel) de sorte la valeur attribuée à tout sommet soit inférieure aux valeurs attribuées à un quelconque de ses successeurs.

1. Pour le graphe b), trouver plusieurs valuations qui correspondent à des tris topologiques.
2. Donner une procédure de calcul d'un tri topologique.